PART4 ベクトルの内積となす角

要点① 空間のベクトルの内積

空間の $\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，なす角 θ を平面の場合と同様に定義し，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ についても，平面の場合と同様に

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

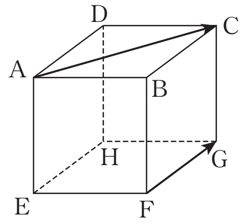
と定義する。

$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときは，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と定義する。

例 1辺の長さが2の立方体ABCD-EFGHにおいて

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{\quad\quad}$

$=\qquad\qquad\qquad\qquad=2\sqrt{2}\times2\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=4$



要点② 成分表示されたベクトルの内積

平面の場合と同様，余弦定理を用いることにより，次のことが成り立つ。

内積と成分

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

例 $\vec{a}=(3,\ 2,\ 1)$，$\vec{b}=(-2,\ 5,\ 0)$ のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\qquad\qquad\qquad\qquad=$

また，なす角について，次のことが成り立つ。

ベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

例 2つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 4,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ 1,\ -1)$ のなす角 θ を求める。

$|\vec{a}|=$ 　　　　　　$=2\sqrt{6}$，$|\vec{b}|=$ 　　　　　　$=\sqrt{6}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ 　　　　　　$=6$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\quad}{\quad\times\quad}=\dfrac{1}{2}$

であるから　$\theta=$

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$$

が成り立つ。

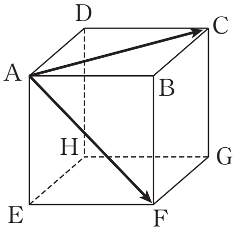
また，平面の場合と同様，次の性質が成り立つ。

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a} \qquad \vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2 \qquad |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} \qquad (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ 　（ただし，k は実数）

4 (1) 1辺の長さが3の立方体 ABCD-EFGH において，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を求めよ。



(2) A(4, 3, 6)，B(2, 1, 2)，C(4, 1, 4) を頂点とする △ABC において，∠ABC の大きさを求めよ。

(3) 2つのベクトル $\vec{a}=(k,\ -1,\ 2)$, $\vec{b}=(5,\ 2,\ -4)$ が垂直であるとき, k の値を求めよ。

Point Pickup

ベクトルの内積となす角

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ とし，なす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2}}$$

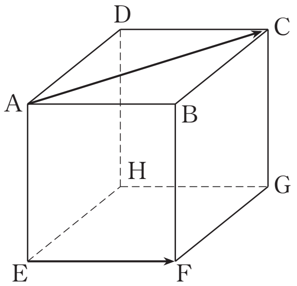
特に　$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0\iff a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

第5講 PART4 確認問題

1 1辺の長さが2の立方体 ABCD-EFGH において

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}=$ ア

である。



2 A(1, 0, 2), B(2, 4, 1), C(0, 2, 0) を頂点とする △ABC において

$\angle BAC=$ イウ °

である。

3 2つのベクトル $\vec{a}=(k,\ 2,\ 3)$, $\vec{b}=(3,\ 6,\ -8)$ が垂直であるとき

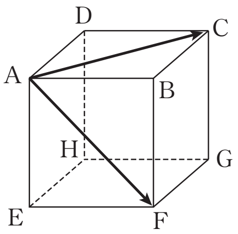
$k=$ エ

である。

PART4 ベクトルの内積となす角

4

(1) 1辺の長さが3の立方体ABCD-EFGHにおいて，内積 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}$ を求めよ。



(2) A(4, 3, 6)，B(2, 1, 2)，C(4, 1, 4) を頂点とする △ABC において，∠ABC の大きさを求めよ。

(3) 2つのベクトル $\vec{a}=(k,\ -1,\ 2)$, $\vec{b}=(5,\ 2,\ -4)$ が垂直であるとき, k の値を求めよ。

[解答]

(1) △ACF は1辺の長さが $3\sqrt{2}$ の正三角形であるから $\angle\mathrm{CAF}=60^\circ$

よって　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AF}|\cos 60^\circ=3\sqrt{2}\times3\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}=9$

(2) $\overrightarrow{BA}=(4-2,\ 3-1,\ 6-2)=(2,\ 2,\ 4)$　より　$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{2^2+2^2+4^2}=2\sqrt{6}$

$\overrightarrow{BC}=(4-2,\ 1-1,\ 4-2)=(2,\ 0,\ 2)$　より　$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2^2+0^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times2+2\times0+4\times2=12$

よって　$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{12}{2\sqrt{6}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ\leqq\angle\mathrm{ABC}\leqq180^\circ$ より　　$\angle\mathrm{ABC}=30^\circ$

(3) $\vec{a}\perp\vec{b}$　より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

よって　$k\times5+(-1)\times2+2\times(-4)=0$　より　$5k-10=0$

したがって　$k=2$

第 5 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：4

[解説]

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}$ であり，△ABC は AB＝BC＝2，

∠B＝90° の直角二等辺三角形であるから

$$AC=2\sqrt{2},\quad \angle BAC=45^\circ$$

よって

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos 45^\circ$$ [A]

$$=2\sqrt{2}\times 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}=4$$

[A]　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

2

[正解] イウ：45

[解説]

$\overrightarrow{AB}=(2-1,\ 4-0,\ 1-2)=(1,\ 4,\ -1)$ より

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+4^2+(-1)^2}=3\sqrt{2}$$

$\overrightarrow{AC}=(0-1,\ 2-0,\ 0-2)=(-1,\ 2,\ -2)$ より

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}=3$$

また

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$=1\times(-1)+4\times 2+(-1)\times(-2)$$ [B]

$$=9$$

よって

$$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$$ [B]

$$=\frac{9}{3\sqrt{2}\times 3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ\leqq\angle BAC\leqq 180^\circ$ より

$$\angle BAC=\mathbf{45}^\circ$$

[B]　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル
$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$
のなす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$
$$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$
$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$
$$=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

3 [正解] エ：4

[解説]

$\vec{a} \perp \vec{b}$ より　$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ [C]

よって

$$k \times 3 + 2 \times 6 + 3 \times (-8) = 0$$ [C]

より

$$3k - 12 = 0$$

したがって

$$k = 4$$

[C]　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を $\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ とするとき

$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\iff a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$